# Л 12. Интегрирование некоторых тригонометрических функций. Интегрирование простейших дробей. Интегрирование рациональных функций Интегрирование некоторых иррациональных функций

**Цель лекции:** познакомить студентов с методами интегрирования различных классов функций: рациональных, иррациональных и тригонометрических. Научить применять разложение дробей на простейшие, выделять полный квадрат, выбирать подходящие замены переменной и использовать методы универсальных тригонометрических подстановок.

**Основные вопросы**

- Интегралы, содержащие квадратный трёхчлен.
- Метод выделения полного квадрата.
- Замена переменной для упрощения интегралов.
- Интегрирование рациональных функций.
- Типы простейших рациональных дробей и методы их интегрирования.
- Интегрирование некоторых иррациональных функций.
- Интегрирование тригонометрических выражений.
- Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$.
- Интегралы вида $\int(\sin^m x \cos^n x)\,dx$.

**Краткое содержание:** в лекции рассматриваются методы вычисления интегралов от рациональных функций, включая выделение полной части и разложение на простейшие дроби. Изучаются способы интегрирования функций, содержащих квадратный трёхчлен, рационализация иррациональных выражений заменами переменной и методы интегрирования тригонометрических функций. Описываются универсальная тригонометрическая подстановка и частные приёмы преобразования подынтегральных функций

**1. Интегрирование некоторых тригонометрических функций.** В этом пункте мы рассмотрим нахождение интегралов вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ , где $R(u,v)$ - рациональная функция относительно $u,v$ .

Проверим, что такие интегралы с помощью универсальной замены переменной $tg\frac{x}{2}=t$ всегда сводятся к интегралам от рациональных функций.

В результате получаем, что

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t)dt$$

где $R_1(t)$- рациональная функция.

Хотя данный метод формально может быть применен к любым указанным интегралам, в случаях, когда функция содержит переменные $\sin x$ или $\cos x$ в степени выше первой, часто получаются достаточно громоздкие выражения. В этих случаях разумнее применять следующие методы.

1°. Если подынтегральная функция является нечетной по косинусу, т.е. если

$$R(\sin x, -\cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x),$$

то она может быть преобразована к виду $\mathrm{R}(\sin x, \cos x) = \mathrm{R}_1(\sin x)\cdot\cos x$, после чего в интеграле делается замена переменной $\sin x = t$ и он сводится к интегралу от рациональной функции

$$R_1(t): \int R_1(\sin x)\cos x dx = |\sin x = t| = \int R_1(t)dt.$$

2°. Если подынтегральная функция является нечетной по синусу, т.е.

$$R(-\sin x, \cos t) \equiv -R(\sin x, \cos x),$$

то она может быть преобразована к виду $R(\sin x, \cos x) = R_1(\cos x)\sin x$ и после замены переменной $\cos x = t$ интеграл сводится к интегралу от рациональной функции

$$R_1(t): \int R_1(\cos x)\sin x dx = |\cos x = t| = -\int R_1(t)dt$$

3°. Если подынтегральная функция удовлетворяет условию

$$R(-\sin x, -\cos x) \equiv R(\sin x, \cos x),$$

то она может быть преобразована к виду $R(\sin x, \cos x) = R_1(tgx)$, после чего в интеграле делается замена $tgx = t$, $x = arctgt$, $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$, и он сводится к интегралу от рациональной функции.

$4^0$. Интегралы типа $\int \sin mx \cos nx dx, \int \cos mx \cos nx dx, \int \sin mx \sin nx dx$, где $m, n$ – постоянные числа.

Подынтегральные функции приводятся к сумме первых степеней синусов и косинусов с помощью формул:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)),$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)),$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)).$$

$5^0$. Интегралы вида $\int sin^{\mathrm{m}}\mathrm{x}\, cos^{\mathrm{n}}\mathrm{x}\mathrm{dx}$, где $m, n$ – любые целые показатели.

**Пример.**

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \int \frac{(1-\cos 2x)(1+\cos 2x)}{4}dx = \frac{1}{4}\int (1 - \cos^2 2x)dx =$$
$$= \frac{1}{4}\int\left(1 - \frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x\right)dx = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x\right) + C.$$

**2. Интегрирование простейших дробей.**

Самый важный класс функций, интегралы от которых всегда выражаются через элементарные функции, представляют рациональные функции: $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x),Q(x)$ - многочлены.

Рациональная дробь называется правильной, если степень многочлена в числителе ниже, чем степень многочлена в знаменателе. В противном случае дробь называется неправильной.

Простейшими дробями называются правильные дроби следующего вида:

$1^0$. $\dfrac{A}{x-a}$;

$2^0$. $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ $(k=2,3,4,...)$;

$3^0$. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$;

$4^0$. $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$; $(k=2,3,4,...)$, где A, B – числовые коэффициенты; трехчлен $x^2+px+q$ не имеет вещественных корней (т.е. $D=\dfrac{P^2}{4}-q<0$).

Каждая правильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы конечного числа приведенных выше четырех типов простейших дробей.

Рассмотрим интегрирование простых дробей.

1°. $\int\dfrac{Adx}{x-a}=A\ln|x-a|+C$;

2°. При $k>1$ $\int\dfrac{Adx}{(x-a)^k}=A\int(x-a)^{-k}dx=A\dfrac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C$.

3°. Метод интегрирования дроби $y=x^2$ был рассмотрен выше.

4°. Рассмотрим метод нахождения интегралов вида $y=\sqrt{x}$, где $k>1$ и дискриминант квадратного трехчлена, стоящего в знаменателе $D=p^2-4q<0$.

Выделив в квадратном трехчлене полный квадрат и сделав замену переменной $x+\dfrac{p}{2}=t$, $dx=dt$, получим интеграл вида $\int\dfrac{A_1t+B_1}{(t^2+m^2)^k}dt$, в котором первое слагаемое интегрируется путем внесения $t$ под знак дифференциала:

$$\int\frac{t}{(t^2+m^2)^k}dt=\frac{1}{2}\int(t^2+m^2)^{-k}d(t^2+m^2)=\frac{1}{2}\frac{(t^2+m^2)^{-k+1}}{-k+1}+C=\frac{(x^2+px+q)^{-k+1}}{-k+1}+C.$$

Найдем интеграл $I_k=\int\dfrac{dt}{(t^2+m^2)^k}$ путем сведения его к интегралам того же вида с меньшим $k$ следующим образом

$$I_k=\frac{1}{m^2}\int\frac{(t^2+m^2)-t^2}{(t^2+m^2)^k}dt=\frac{1}{m^2}\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}-\frac{1}{m^2}\int\frac{t^2}{(t^2+m^2)^k}dt=$$

[a, b]

$$= \frac{1}{m^2} I_{k-1} - \frac{1}{2m^2} \int t d \frac{(t^2 + m^2)^{-k+1}}{-k+1} = \left| u = t, v = \frac{(t^2 + m^2)^{-k+1}}{-k+1} \right| = \frac{1}{m^2} I_{k-1} -$$

$$- \frac{1}{2m^2 (1-k)} \left( \frac{t}{(t^2 + m^2)^{-k+1}} - I_{k-1} \right).$$

Применяя этот процесс к $I_{k-1}$ получим, что нахождение этого интеграла сводится в конечном счете к интегралу $I_1 = \int \frac{dt}{t^2 + m^2} = \frac{1}{m} arctg \frac{t}{m} + C$ .

Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен. Здесь мы рассмотрим метод нахождения интегралов вида

$$\int \frac{mx + n}{ax^2 + bx + c} dx \quad \text{и} \quad \int \frac{mx + n}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx .$$

1°. Выносим из квадратного трехчлена $ax^2 + dx + c$ коэффициент $a$ и выделяем в нем полный квадрат следующим образом:

$$ax^2 + bx + c = a\left( x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a} \right) = a\left( x^2 + 2\frac{b}{2a} x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) =$$

$$= a\left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) = a\left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + k^2 \right)$$

где $\mathrm{k} = \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{a}} - \frac{\mathrm{b}^2}{4\mathrm{a}^2}$ .

2°. Делаем в интеграле замену переменной $x + \frac{b}{2a} = t$, $dx = dt$, в результате он приводится к виду $\int \frac{m_1 t + n_1}{t^2 \pm k^2} dt$ или $\int \frac{m_1 t + n_1}{\sqrt{\pm t^2 \pm k^2}} dt$ .

3°. Записываем интеграл в виде суммы двух интегралов в соответствии с двумя слагаемыми числителя. В первом интеграле делаем замену переменной $t^2 \pm k^2 = u$. В результате оба слагаемых - табличные интегралы.

**3. Интегрирование рациональных функций.** Самый важный класс функций, интегралы от которых всегда выражаются через элементарные функции, представляют рациональные функции: $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x), Q(x)$ - многочлены.

Если рациональная дробь неправильная, то с помощью деления $P(x)$ на $Q(x)$ можно выделить из нее целую часть и правильную рациональную дробь. Например,

$$\frac{\mathrm{x}^4 - 4\mathrm{x}^3 + 2\mathrm{x}^2 - 1}{\mathrm{x}^2 - \mathrm{x} + 1} = \mathrm{x}^2 - 3\mathrm{x} - 2 + \frac{\mathrm{x} + 1}{\mathrm{x}^2 - \mathrm{x} + 1}$$

Рассмотрим вопрос о разложении рациональных дробей на простые дроби. Из алгебры известно, что всякий многочлен с вещественными коэффициентами степени выше второй разлагается единственным образом на линейные и квадратичные множители с вещественными коэффициентами.

Пусть многочлен $Q(x)$ разложен на множители в следующем виде:

$$Q(x) = a_0 (x - a_1)^{k_1} \cdot (x - a_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x - a_s)^{k_s} \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{n_1} \ldots \cdot (x^2 + p_m x + q_m)^{n_s}$$

Например: 1) $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$;

2) $x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$;

3) $x^3 + x^2 - 2x = x(x-1)(x+2)$.

В алгебре устанавливается что:

1). Каждому неповторяющемуся множителю вида $x-a$ соответствует в разложении одна простая дробь вида $\frac{A}{x-a}$. 2). Каждому множителю вида $(x-a)^k$ соответствует сумма k простых дробей вида $\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k}$. 3). Неповторяющемуся множителю $x^2 + px + q$ соответствует одна простая дробь вида $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$. 4). Каждому множителю вида $(x^2+px+q)^n$ соответствует сумма n простых дробей вида

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{M_nx+N_n}{(x^2+px+q)^n}.$$

Здесь $A, M, N, A_i, M_i, N_i$ - неизвестные числовые коэффициенты. Неизвестные коэффициенты можно определить следующим образом.

*Метод частных значений.* Этот метод основан на подборе частных значений $x$ так, чтобы появилось одно уравнение с одним неизвестным коэффициентом. Метод применяется для случая, когда многочлен в знаменателе имеет только простые вещественные корни. Рассмотрим метод неопределенных коэффициентов. Правильную рациональную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ запишем в виде суммы простых дробей, приведем к общему знаменателю. Затем отбрасываем знаменатель в обеих частях равенства и получим равенство двух многочленов. Это равенство должно быть тождественным, поэтому коэффициенты при одинаковых степенях $x$ в левой и правой частях должны быть равны. Получим систему $n$ линейных уравнений с неизвестными. Из этой системы определяются неизвестные коэффициенты.

## 4. Интегрирование некоторых иррациональных функций

1. Интегралы вида $\int R\left(x, x^{\frac{p_1}{q_1}}, x^{\frac{p_2}{q_2}}, \ldots, x^{\frac{p_n}{qn}}\right)dx$

2. Рассмотрим нахождение интегралов вида $\int R\left(x, x^{\frac{p_1}{q_1}}, x^{\frac{p_2}{q_2}}, \ldots, x^{\frac{p_n}{qn}}\right)dx$, где $R(\ldots)$ рациональная функция, т.е. отношение двух многочленов, содержащих переменную $x$ и степенные функции вида $x^{\frac{p_i}{q_i}} = \sqrt[q_i]{x^{p_i}}$. Обозначим через $k$ - наименьший общий знаменатель дробей $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots, \frac{p_n}{q_n}$ и сделаем в исходном интеграле замену переменной $x = t^k$, $dx = kt^{k-1}dt$.

3. В результате получим интеграл от рациональной функции переменной $t$

$$\int R\left(t^k, t^{\frac{kp_1}{q_1}}, t^{\frac{kp_2}{q_2}}, \ldots, t^{\frac{kp_n}{q_n}}\right) kt^{k-1} dt.$$

Поскольку все числа $\frac{kp_i}{q_i}$ - целые, как было отмечено выше, такой интеграл всегда находится в элементарных функциях.

Интегралы вида $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_n}{q_n}}\right) dx$, где $R(\ldots)$ - рациональная функция, с помощью замены переменной $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$, где $k$ - наибольший знаменатель дробей $\left(\frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_n}{q_n}\right)$, также сводятся к интегралам от рациональных функций.

**Вопросы для самоконтроля**

1. Как выполняется выделение полного квадрата в квадратном трёхчлене?
2. Какие замены переменной используются при интегрировании выражений, содержащих квадратный трёхчлен?
3. Что называют рациональной функцией?
4. Как разложить рациональную дробь на простейшие?
5. В чём заключается метод неопределённых коэффициентов?
6. Какие четыре типа простейших дробей существуют?
7. Как интегрируются дроби вида $\frac{1}{ax+b}$ и $\frac{1}{(ax+b)^n}$ ?
8. Какие методы используются для интегрирования иррациональных выражений?
9. Что такое универсальная тригонометрическая подстановка?
10. Какие интегралы сводятся к интегралам рациональных функций после замены $t = \tan\frac{x}{2}$ ?
11. Как интегрировать выражения вида $\sin^m x \cos^n x$?

**Литература**


1. Махмеджанов Н., Махмеджанова Р.Н. Сборник задач по высшей математике. – 2009. – 408 стр
2. Н.М. Махмеджанов. Сборник заданий по высшей математике. Алматы: «Қазақ Университеті», 2021
3. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа, 2005. Т.1. Т.2.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учебное пособие для студентов втузов. Ч. 1 М.: Высш. шк., 1986. – 304с.

5. Демидович Сборник задач по математическому анализу